Boolesche (Schalt-) Algebra (8)

Karnaugh-Diagramm

- ist eine graphische Technik zur Darstellung und Vereinfachung von Booleschen Ausdrücken
- ist eine andere, zweidimensionale Darstellung von Wahrheitstabellen in Form von sogenannten Funktionstafeln, wobei jedes Quadrat genau einen Minterm repräsentiert.

Beispiele:

für 2 Variable:

B \ A	0	1
0	$\bar{A}\bar{B}$	$A\bar{B}$
1	$\bar{A}B$	AB

für 3 Variable:

C \ AB	00	01	11	10
0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}B\bar{C}$	$AB\bar{C}$	$A\bar{B}\bar{C}$
1	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	ABC	$A\bar{B}C$

Boolesche (Schalt-) Algebra (9)

Hauptidee:
Horizontal und vertikal benachbarte Quadrate entprechen Mintermen, die nur bzgl. **einer** Variable differieren.

Es gilt: Benachbarte Einsen führt zu Vereinfachungen.

Fragestellung für das Erstellen eines Karnaugh - Diagramms (KD):
Welche Minterme (Quadrate) werden von einem Produktterm (Monom) überdeckt?

---> Es gelten folgende Regeln:

- Für, z.B., ein KD mit 4 Variablen, gilt:
  - Produktterm mit 1 Variablen überdeckt 8 Quadrate
  - Produktterm mit 2 Variablen überdeckt 4 Quadrate
  - Produktterm mit 3 Variablen überdeckt 2 Quadrate
  - Produktterm mit 4 Variablen überdeckt 1 Quadrat
- Ein Quadrat kann zu mehreren Termen gehören (Idempotenzregel!).
- Karnaugh- Diagramme repräsentieren geometrisch einen **Torus --->** oberste Zeile ist auch benachbart zur untersten Zeile und die Spalte links außen zu der rechts außen

Boolesche (Schalt-) Algebra (10)

Beispiel 1:

$$f_1 = \neg x_1 \neg x_2 \neg x_3 + \neg x_1 \neg x_2 x_3 + x_1 \neg x_2 \neg x_3 + x_1 \neg x_2 x_3 + \neg x_1 x_2 \neg x_3$$

?

?

?

$$f_1 = \neg x_2 + \neg x_1 \neg x_3$$

Regeln für das Vereinfachen von Booleschen Ausdrücken:

•Überdeckung aller Einsen mit minimaler Anzahl von Gruppen (Minimierung der Anzahl der Monome)
•Wahl von Gruppen maximaler Größe (Minimierung der Anzahl der Variablen in einem Monom)

Es gilt: Es kann mehrere minimale Lösungen geben.

Beispiel 2:

$$f_4 = \neg x_1 \neg x_2 \neg x_3 \neg x_4 + \neg x_1 \neg x_2 \neg x_3 x_4 + \neg x_1 x_2 \neg x_3 x_4 + \neg x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

---> ....

$$f_4 = \neg x_1 \neg x_2 \neg x_3 + x_2 x_3 x_4 + \neg x_1 x_2 x_4$$

oder

$$f_4 = \neg x_1 \neg x_2 \neg x_3 + x_2 x_3 x_4 + \neg x_1 \neg x_3 x_4$$

Boolesche (Schalt-) Algebra (13a)

Definition 9:

Seien, *m, m‘* Monome. m‘ heißt *Teilmonom* von *m*, wenn jedes Literal in *m‘* auch in *m* vorkommt. Kommt in *m* mindestens ein Literal vor, das nicht in *m‘* vorkommt, dann ist *m‘* ein *echtes Teilmonom*.

Definition 10:

Ein Monom *m* heißt *Implikan*t einer Schaltfunktion *f*, falls *ON(m)* Teilmenge von *ON(f)* ist.

Lemma:

Alle Monome eines Polynoms *p* (= BA als Disjunktion von Monomen) von *f* sind Implikanten von *f.*

Definition 11:

Ein Monom *m* heißt *Primimplikant* von *f*, falls kein echtes Teilmonom von *m* auch Implikant von *f* ist.

Satz (Primimplikantensatz von Quine):

Für jede BF *f* gibt es ein Minimalpolynom *p*, welches ausschließlich aus Primimplikanten von *f* besteht.

Quine/McCluskey-Verfahren:

Dieses Verfahren zur Minimierung einer BF erhält als Eingabe alle Minterme der entsprechenden DNF und berechnet daraus die Menge aller Primimplikanten. Es werden schrittweise immer solche Monome miteinander verglichen, die

- die gleichen Variablen enthalten und
- die Hammingdistanz 1 besitzen (sich nur im Wert einer Variablen unterscheiden).

Boolesche (Schalt-) Algebra (14)

Zusammenfassung:

- Es wurde gezeigt, wie sich kombinatorische Schaltnetze bzw. Schaltkreise mit einem bestimmten, gewünschten Verhalten auf der Basis von Gattern in folgenden Schritten realisieren lassen:
  - Das gewünschte Verhalten wird in Form von Booleschen Ausdrücken beschrieben.
  - Durch Anwendung von algebraischen, algorithmischen oder graphischen Methoden wird daraus ein Minimalpolynom abgeleitet.
  - Der resultierende Schaltkreis wird erzeugt durch die Verbindung der den Operatoren entsprechenden Gattern mit den zugehörigen Variablen als Eingängen.

- Mit fortschreitender Technologie wurde es möglich, die Anzahl der Gatter pro Chip exponentiell zu erhöhen. Je nach erzielter Integrationsdichte unterscheidet man verschiedene Technologien:
  - SSI (< 20 Gatter pro Chip)
  - MSI (> 20 Gatter, komplette Realisierung einer häufig benutzten logischen Funktion wie z.B. Multiplexer)
  - LSI (Realisierung kompletter Systeme, z.B. Mikroprozessoren einem Chip)
  - VLSI (Produktion von Speicherchips von enormer Kapazität)